Educación Matemática
ISSN: 1665-5826
revedumat@yahoo.com.mx
Grupo Santillana México
México

Rodríguez, Miguel; Gregori, Pablo; Riveros, Ana; Aceituno, David

Análisis de las estrategias de resolución de problemas en matemática utilizadas por estudiantes talentosos de 12 a 14 años

Educación Matemática, vol. 29, núm. 2, agosto, 2017, pp. 159-186
Grupo Santillana México
Distrito Federal, México

DOI: 10.24844/EM2902.06

Análisis de las estrategias de resolución de problemas en matemática utilizadas por estudiantes talentosos de 12 a 14 años

Analysis of the Strategies Used by Talent Students, 12 to 14 Years-old, to Solve Mathematics Problem

Miguel Rodríguez[1]
Pablo Gregori[2]
Ana Riveros[3]
David Aceituno[4]

Resumen. Este artículo presenta parte de un estudio cuyo foco es el análisis de estrategias y procedimientos matemáticos que desplegaron estudiantes talentosos en un taller de resolución de problemas en la Quinta Región de Chile, utilizando el análisis implicativo como recurso estadístico. La metodología consideró el trabajo de un grupo de estudiantes que individualmente resolvían problemas según la temática en estudio, y a los cuales se les permitió explicar sus estrategias y formas de abordar los problemas planteados en forma socializada. Como principal hallazgo, se evidencia el uso eficaz de las estrategias *ensayo y error*, *búsqueda de patrones* y *haz una lista* para resolver distintos problemas, que demandaron manipular un conjunto de números naturales consecutivos bajo una condición dada. Además, se describen los procedimientos matemáticos que se activaron a la luz de las estrategias utilizadas, y su relación con los contenidos matemáticos que los programas de estudio declaran. Esta estrategia de trabajo permite establecer las distintas formas de proceder en la resolución

Fecha de recepción: 24 de marzo de 2016. **Fecha de aceptación:** 23 de marzo de 2017.
1 Universidad de Playa Ancha. Chile. mrodriguez@upla.cl
2 Universidad Jaume I. España. gregori@uji.es
3 Pontificia Universidad Católica de Valparaíso. Chile. ana.riveros@pucv.cl
4 Pontificia Universidad Católica de Valparaíso. Chile. david.aceituno@pucv.cl

de problemas de los estudiantes que participaron y al mismo tiempo el uso de los recursos operatorios que ellos utilizaban, considerando la necesidad de desarrollar la habilidad de resolver problemas, establecida por el currículo nacional en Chile.

Palabras Clave: *Resolución de problemas, estrategias, talento.*

Abstract. This article presents part of a study that focuses on the analysis of strategies and mathematical procedures displayed by gifted students in a problem-solving workshop, which was implemented in the fifth region of Chile. The implicative analysis was used as statistic resource. The methodology considered the work that a group of students produced individually as they solved problems according to the topic of study. Additionally, these students were allowed to explain their strategies and methods, as well as to approach the proposed problems in a socialized way. Findings reveal the strategies used by students, which include trial and error, pattern recognition, make-a-list to solve different problems that demanded the knowledge of a set of consecutive natural numbers under a given condition. They also show the mathematical procedures that were activated when using the strategies, and their relation to the mathematical contents stated in the study plans. This working strategy allows to identify different approaches to problem-solving, and to specify the operatory resources that students used, considering the need to develop the skill to solve problems, as stated by the Chilean national curriculum.

Key Words: *Problem solving, strategies, talent.*

1. INTRODUCCIÓN

El currículo escolar chileno, tanto en el ciclo de enseñanza básica y enseñanza media, organiza la enseñanza de la Matemática a través de cuatro ejes: Estadística-Probabilidades, Números, Álgebra y Geometría. A partir de ellos se promueven cuatro habilidades fundamentales que son: representar, argumentar-comunicar, resolver problemas y modelar (MINEDUC, 2012). Estas habilidades, desarrolladas a través de los contenidos que cada eje incluye en el respectivo nivel de escolaridad, son evaluados a partir de una prueba nacional denominada "Sistema de Medición de la Calidad de la Educación" (SIMCE), y pruebas internacionales tales como el "Programa Internacional para la Evaluación de Estudiantes" (PISA) y el "Estudio de las Tendencias Internacionales en Matemáticas y Ciencias" (TIMSS), (MINEDUC, 2007).

El bajo desempeño que han obtenido los estudiantes chilenos en estos procedimientos evaluativos, ha impulsado la implementación de un ajuste curricular que considera todo el currículo nacional, incluida la asignatura de Matemática. Dicho ajuste pone énfasis, entre otras, en la habilidad de resolver problemas, según se detalla en las Bases Curriculares de dicho subsector (MINEDUC, 2016).

Por otro lado, cabe mencionar que el Ministerio de Educación de Chile busca favorecer el desarrollo del "talento académico" en escuelas y liceos de dependencia municipal a través de la implementación de Programas de Enriquecimiento del Talento Académico (PENTA), dirigidos a la alta capacidad, los que se imparten en algunas instituciones de educación superior del país (MINEDUC, 2010).

Considerando la relevancia que hoy tiene en nuestro país la Resolución de Problemas (RP) y la necesidad manifiesta de promover el "talento académico", entendiéndolo como una subdivisión del talento, se decidió indagar en las estrategias y procedimientos matemáticos que despliegan estudiantes talentosos de Enseñanza Básica cuando resuelven un problema de matemática. El propósito es describir dichas estrategias y los procedimientos matemáticos que se activan a la luz de los contenidos que declaran los planes y programas de estudio vigentes; de esta manera, se pretende levantar evidencia empírica que permita sustentar una propuesta en RP a nivel escolar.

2. SOBRE LA INVESTIGACIÓN

Para dar cuenta de lo anterior, se implementó un taller de RP al interior de un programa para estudiantes talentosos que se dicta en una universidad de la ciudad de Valparaíso, Chile. El taller estuvo dirigido a estudiantes de 12 a 14 años, y su planificación incorporó problemas no rutinarios para estimular el uso de estrategias y procedimientos matemáticos con el propósito de identificar aquellos aspectos inherentes a las cualidades matemáticas que están en juego en la RP (Santos, 1997). En este marco, el objetivo es dar cuenta de aquellos caminos de solución, las nociones e ideas matemáticas que se activan en los estudiantes y las estrategias que se ponen de manifiesto en función del tipo de problema que se plantea (Santos, 2008).

Por otro lado, sin ser exhaustivos, se consideraron algunas investigaciones que dan cuenta de las heurísticas, estrategias y procedimientos matemáticos en la RP, las cuales se diferencian en cuanto al nivel educacional de los estudiantes participantes, el contexto donde se abordó y el respectivo énfasis que se dio a la RP (Jaime y Gutiérrez, 2014; Palacios y Solarte, 2013; Pifarré y Sanuy; 2001; Pino, 2013; Rodríguez y Parraguez, 2014; Valle *et al*., 2007). En la Tabla 1 se detalla el foco y algunos hallazgos que se dieron en estas investigaciones, antecedentes que ayudaron a enfocar el taller de RP que se implementó.

Cabe destacar, desde los distintos antecedentes que se despliegan en la Tabla 1, el interés que cobra la RP en la formación de profesores con énfasis en la enseñanza de heurísticas y estrategias (Blanco *et al*., 2015; Palacios y Solarte, 2013; Pino, 2013) y la relevancia de incorporar problemas no rutinarios para estimular el uso de estrategias y procedimientos matemáticos auténticos, sin dejar de mencionar el rol que cumple una olimpiada como instancia para indagar en estos tipos de procedimientos a la luz del contenido disciplinar que se pone en juego según lo que declaran los programas de estudio vigentes a nivel escolar (Rodríguez y Parraguez, 2014; Valle *et al*., 2007). Por último, se enfatiza en la necesidad de explorar los procesos de enseñanza-aprendizaje en la RP considerando estudiantes talentosos para poder sustentar propuestas de aula que favorezcan a este tipo de estudiantes en su proceso formativo (Jaime y Gutiérrez, 2014).

3. LINEAMIENTOS EN TORNO A LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN EL MARCO DE ESTA INVESTIGACIÓN

Históricamente se hace necesario recordar que la RP se encuentra presente desde los inicios de nuestra civilización en variados contextos de la vida cotidiana, y adquiere un nuevo estatus y posicionamiento como técnica en el trabajo de la matemática gracias a los aportes de matemáticos como Descartes y Wallis, entre otros (Cruz, 2006; Santos Trigo 2007). Desde el punto de vista pedagógico, la RP se sistematizó a partir de las cuatro fases que propuso Polya (1990), a saber: comprensión del problema, concepción de un plan, ejecución del plan y visión retrospectiva, destacando el rol que cumplen las heurísticas y las estrategias en el proceso de resolución (Polya, 1990).

Con la propuesta de Schoenfeld (1994) se incorporan los procesos metacognitivos y el papel de las creencias en la RP. Asimismo, se han impulsado iniciativas que dan cuenta de ésta en otras áreas del conocimiento (Pozo *et al*., 1994) y el desarrollo de una metodología más bien holística como es el caso de Problem

Tabla 1. Investigaciones sobre RP con distintos protagonistas y contextos.

Autores	Foco del estudio	Aspectos que se ponen de relieve
Jaime y Gutiérrez, 2014	Este estudio involucra a estudiantes de primaria con altas capacidades para documentar su desempeño en la resolución de problemas de matemática, considerando sus potencialidades que los distinguen, por ejemplo, rapidez y originalidad en sus respuestas.	El desempeño de los estudiantes ante los diversos problemas planteados pone de manifiesto las características que los identifican. La flexibilidad al abordar los distintos problemas es un aspecto a destacar del análisis de los problemas que se presentan.
Palacios y Solarte, 2013	Se hace un seguimiento a profesores de enseñanza básica en formación respecto del uso de heurísticas en problemas abiertos durante un curso de RP. Se ven los alcances y limitaciones que tiene la RP en el proceso formativo y su relación con el uso de estrategias heurísticas.	El uso de estrategias heurísticas permite a quienes resuelven un problema tener un nuevo panorama en el proceso de solución del problema, el conocimiento matemático vinculado al problema es necesario para la solución de éste.
Pifarré y Sanuy, 2001.	Se estudia el efecto de una secuencia de problemas para la enseñanza de estrategias generales y específicas a nivel escolar cuyo tema central es la proporcionalidad directa. Por otro lado, con el tipo de problema se aborda la enseñanza de estrategias en RP atendiendo a una propuesta de instrucción.	Es necesario presentar problemas que estén ligados al contexto de los estudiantes, adecuar el proceso de enseñanza e incorporar materiales diversos para estimular el uso de estrategias en la RP y promover la discusión y el trabajo en equipo.
Rodríguez y Parraguez, 2014.	Se dan directrices para interpretar estrategias en la resolución de problemas no rutinarios, en el contexto de una olimpiada de RP a nivel escolar, considerando el tipo de conocimiento que el estudiante despliega.	El tipo de estrategias utilizadas dependerá del tipo de problema que se plantea. El tipo de conocimiento, las estrategias y el grado de articulación que se da va incidir en la resolución del problema.
Valle *et al.*, 2007	Se reportan las estrategias generales, en el marco de los trabajos de Polya, cuando se resuelven 6 problemas en el contexto de una olimpiada de matemática a nivel preuniversitario.	El tipo de estrategias que los participantes utilizan está en estrecha relación con el tipo de problema que se plantea.
Pino, 2013	Se estudian los afectos del proceso de RP en un curso para estudiantes en formación para profesor de matemática. Es importante el papel de las creencias en este estudio.	Las creencias y actitudes hacia la RP se modifican en la medida que los futuros profesores de matemática tengan la oportunidad de abordar problemas no rutinarios.

Based Learning (PBL) (Gómez, 2010); inclusive se han hecho propuestas que simplifican las cuatro fases enunciadas por Polya (1990) como lo plantea Mayer (*Cit.* en Pozo *et al.*, 1994). Por último, cabe destacar que en teorías de la Didáctica de la Matemática, un problema puede ser visto en términos de una tarea o una situación adidáctica (Santos, *op. cit.*; Rodríguez y Parraguez, 2014).

En atención a los antecedentes que se expusieron en el apartado anterior, y considerando los desafíos que demanda este mundo globalizado, con el impacto de las Tecnologías de la Información y la Comunicación (TIC) en el proceso de enseñanza-aprendizaje (UNESCO, 2013), es posible inferir que la asignatura de Matemática no sólo debe estar orientada a la enseñanza de procedimientos y conceptos matemáticos, sino que además debe promover el desarrollo de un pensamiento matemático (Santos, 2007; MINEDUC, 2007) a través del cual se estimulen aspectos cognitivos, afectivos y metacognitivos y, a su vez, se activen nociones matemáticas, heurísticas y estrategias desde problemas no rutinarios, tal como plantea Santos (2007). En el siguiente diagrama, Figura 1, se explicitan algunos de estos componentes, entre los cuales se encuentra la RP.

Figura 1. Componentes de un pensamiento matemático.

Para efectos de esta investigación se ha considerado la propuesta de Santos Trigo, ya citado, quien postula que la RP es una actividad que estimula el desarrollo de habilidades y estrategias en el aprendizaje de la matemática. Además pone de relieve conocimientos previos, procesos cognitivos y metacognitivos. Cobra relevancia en esta mirada la resolución de problemas no rutinarios; es decir aquellos desafíos o tareas que el estudiante entiende pero que no lleva implícito un procedimiento en sí.

4. ANTECEDENTES RESPECTO DEL TALENTO

El sistema educativo es una realidad compleja al igual que el aula escolar. En ella encontramos estudiantes con diversas características tanto académicas como socio-afectivas (Roget, 2009). En Chile y en particular para la región de Valparaíso, lo anterior no es menos cierto. Existen estudiantes que presentan diversas necesidades durante el proceso de enseñanza y aprendizaje (MINEDUC, 2010), ya sea manifestando dificultades en el aprendizaje o, por el contrario, manifestando un talento (Stainback y Stainback, 1999).

Teóricamente, el talento es reconocido como una habilidad o desempeño excepcional que posee un niño o joven en "una o más áreas que tiene valor para una cultura específica" (Kokot, 1998). Por otro lado Aretxaga (2013), plantea que la evolución del concepto de inteligencia, ya no centrado en pruebas estandarizadas que miden el coeficiente intelectual, ha favorecido el uso de un constructo más amplio, el de altas capacidades, el cual permite referirse no tan sólo a genialidad, en el sentido de la superdotación, sino que además a talento, talento académico, dotación, precocidad por nombrar algunos.

Para algunos autores, es necesario distinguir entre talento y dotación. Gagné (citado en Flanagan y Arancibia, 2005), a través de su *Modelo Diferenciador de Dotación y Talento* (*MDDT*), establece la distinción entre ambas nociones, tal como lo exponen las autoras:

> La dotación designa la posesión y uso de habilidades naturales no entrenadas y espontáneamente expresadas en al menos una aptitud de dominio intelectual, creatividad, socio-afectiva o sensorio-motriz cuyo desarrollo y nivel de expresión dependen parcialmente de la dotación genética del individuo, pudiendo ser observadas en las diversas tareas de la persona a lo largo de su historia. El talento, en cambio, puede ser definido como el dominio destacado de conocimientos, destrezas o habilidades desarrolladas sistemáticamente en al menos un campo determinado de la actividad humana, en un grado que sitúa al estudiante dentro del 10% superior del grupo de personas de su misma edad que ha cultivado ese campo o actividad (Flanagan y Arancibia, 2005).

El talento ha presentado una evolución conceptual y teórica a través del tiempo, lo que puede desprenderse de los avances de la teoría de inteligencias múltiples desarrollada por Gardner (1993) y la propuesta de Sternberg (1997).

Desde la perspectiva anterior, los estudiantes con talento evidencian características cognoscitivas que los diferenciarían de los demás estudiantes, por ejemplo, una buena memoria, un mayor conocimiento de base, mejores procesos autorreguladores, mayor velocidad en los procesos de aprendizaje, mejor representación de los problemas, mayor uso de estrategias elaboradas en el empleo del conocimiento, gran flexibilidad cognitiva y una mayor preferencia por la complejidad (Jaime y Gutiérrez, 2014; Shore y Kanevsky, 1993). Además, destaca en ellos un alto nivel de atención y concentración (Aretxaga, 2013), habilidades para trabajar con ideas abstractas y una mayor capacidad para establecer relaciones lógicas, sintetizar y efectuar generalizaciones (Artola *et al.*, 2005; Martínez y Guirado, 2012; Aretxaga, 2013). Asimismo, dan cuenta de una mayor perspicacia en tanto son agudos observadores, lo que les permite descubrir con facilidad la idea o aspecto central de algún problema o fenómeno (Aretxaga, 2013).

Si bien el término talento académico entendido como una subdivisión del talento, en el marco de las altas capacidades, es el que prevalece desde un punto de vista educativo, para efectos de esta investigación asumiremos el concepto de talento desde el *Modelo Diferenciador de Dotación y Talento (MDDT)* propuesto por Gagné (1985), citado anteriormente, y desde el *Modelo de los Tres Anillos* de Renzulli (1978).

Bajo el modelo de Renzulli, el talento constituye un fenómeno que requiere de tres dimensiones para su adecuado desarrollo, esto es (a) *altas habilidades intelectuales*, correspondientes a capacidad de pensamiento abstracto, razonamiento verbal, memoria, entre otros, a nivel general, y la capacidad para adquirir conocimiento y desempeñarse favorablemente en ciertas disciplinas y áreas especializadas; (b) *compromiso con la tarea*, entendido como el interés, motivación y perseverancia con la cual el niño o joven asume y cultiva su talento; y (c) *creatividad*, vale decir, la capacidad para adaptarse a distintos desafíos y problemáticas, manifestando curiosidad, flexibilidad y originalidad en el abordaje de éstas. De este modo, el autor plantea que los alumnos con alta capacidad "poseen o pueden desarrollar este conjunto de capacidades y aplicarlas a cualquier área potencialmente importante de la actividad humana" (Renzulli, 1978: 184). Lo anterior, en consecuencia, nos permite atender aquellas características relevantes propias del talento que están en sintonía con la RP en matemática.

4.1. Sobre la selección de estudiantes en los programas de enriquecimiento académico

Cabe mencionar que el proceso de selección de estudiantes talentos en Chile se rige por la normativa establecida por el Ministerio de Educación. De acuerdo a lo anterior, los estudiantes seleccionados para ingresar a un programa de enriquecimiento académico deben ubicarse por sobre el percentil 75, comparado con la población de estudiantes en su mismo rango de edad (MINEDUC, 2015). Si bien el modelo de Gagné señala que sólo 10% de la población denota un desempeño superior, otros modelos de talento, como el de Renzulli (1978), indican que este porcentaje puede llegar a operar en el 20% (Artola, Barraca y Mosteiro, 2005).

Por otra parte, considerando los diversos parámetros establecidos en Chile, ubicarse por sobre el 25% superior constituye un antecedente de relevancia para suponer condición de dotación. La tarea a la que son sometidos los estudiantes para definir su nivel de desempeño, se realiza en función de la ausencia del factor verbal, pues éste puede condicionar el logro de aquellos estudiantes que, teniendo las capacidades cognitivas, podrían obtener desempeños deficientes por no presentar el mismo nivel de dominio verbal que sus pares, aspecto que tiene relación con los problemas de acceso a mejores oportunidades educativas, en tanto en Chile se evidencia una situación de segregación a nivel escolar (Mansilla, Vásquez y Estrada, 2012).

5. PREGUNTAS DE INVESTIGACIÓN Y METODOLOGÍA

En atención a los distintos antecedentes que se han presentado y el interés particular de trabajar con estudiantes talentosos, dadas sus características particulares, se formularon las siguientes preguntas de investigación:

a) ¿Qué tipo de estrategias ponen de manifiesto estudiantes talentosos al abordar un problema de matemática?
b) ¿Los procedimientos matemáticos que despliega un estudiante talentoso, se articulan con los contenidos disciplinarios que los programas de estudio vigentes plantean?

Para responder a dichas preguntas, durante el segundo semestre del año 2013 se diseñó y presentó al Programa de Buenos Estudiantes con Talento

Académico (BETA) el taller denominado "La resolución de problemas y el uso de TIC en matemática", cuya planificación se encuentra en los anexos. En dicho taller se inscribieron 18 estudiantes cuyas edades fluctuaron entre los 12 y 14 años, lo que corresponde al Nivel 1 en dicho programa.

Para el proceso de identificación y selección de estudiantes se utilizó el Test de Matrices Progresivas Escala General (Raven *et al.*, 2004), mediante el cual se evalúa la capacidad lógica –entendida como la habilidad para inferir relaciones no evidentes de información desorganizada a partir de una cuidadosa observación– y la capacidad reproductiva –que se corresponde con la dimensión de memoria y de acumulación de conocimientos– de jóvenes en un rango etario de 13 a 18 años, procedimiento que ha sido validado a nivel nacional (Fernández, Valera, Martina y Rial, 2012; Mancilla, Vásquez y Estrada, 2012; Raven *et al.*, 2004).

Los problemas que se propusieron en el taller se eligieron procurando escasa referencia a algún conocimiento disciplinar específico y, a la vez, permitieran el uso de diversas estrategias y procedimientos matemáticos declarados en los programas de estudio que están actualmente vigentes (MINEDUC, 2012). En particular, se incluyeron problemas que demandaron distribuir números naturales atendiendo a una condición dada, problemas de criptoarimética y algunos "rompecabezas matemáticos" los que en su mayoría fueron seleccionados de los textos de Recaman (2006) y Emmet (1998). Del estudio que se reporta, se expone un análisis al primer tipo de problemas, distribuir números naturales bajo una condición dada.

Para describir la articulación entre los procedimientos matemáticos, estrategias y el respectivo contenido disciplinar, se consideró un análisis *a priori* para resaltar los aspectos formales que el problema o tarea involucra, desde un punto de vista matemático, como lo plantean Rodríguez y Parraguez (2014).

Para establecer posibles relaciones entre los procedimientos matemáticos y estrategias utilizadas se incorporó el uso de estadística implicativa, cuyas sigla en francés es ASI (Analyse Statistique Implicative) (Gras *et al.*, 2008; Orús *et al.*, 2009), mediante su herramienta informática CHIC (Cohesive Hierarchical Implicative Classification) versión 6.0. Una de las motivaciones para el uso de este tipo de estadística obedece, fundamentalmente, a que ASI es un método exploratorio no simétrico que permite obtener indicadores como similaridad e intensidad de implicación entre variables analizadas, los que son calculados bajo un enfoque probabilístico (Gras *et al.*, 2008; Orús *et al*; 2009). La similitud es una medida de correspondencia o semejanza entre las variables que se desean clasificar. Por otro lado, la intensidad de implicación es una medida que se basa en el índice de implicación, el que corresponde al número de contraejemplos que invalida la implicación entre dos variables, en el sentido matemático clásico (Orús *et al.*, 2009).

5.1. Análisis a un problema desarrollado en el curso de RP

Como primera actividad del taller se planteó un problema aritmético para indagar en las estrategias y procedimientos matemáticos. Previamente, se realizó un análisis *a priori*, en función del nivel escolar de los participantes para establecer posibles procedimientos matemáticos y eventuales estrategias, lo que se detalla a continuación.

> **Problema**: Dados los números del 1 al 24, sepárelos en dos conjuntos, S y P, de tal manera que la suma de los números pertenecientes a S sea igual al producto de los números que pertenecen a P. Explique cómo resolvió el problema.

5.1.1. Análisis a priori al problema planteado

En la Tabla 2 se presenta una posible solución, utilizando un procedimiento que se asocia a un conjunto ordenado de números naturales consecutivos y que, a su vez, permite obtener la suma de dichos números. Procedimiento que el matemático Gauss utilizó en su juventud para obtener la suma de los 100 primeros números naturales.

Considerando la resolución del problema, Tabla 2, se explicitan algunos procedimientos y estrategias que fueron rotuladas, Tabla 3, en términos de variables para ser analizadas con el software CHIC. Dichos procedimientos y estrategias se explicitaron en función del nivel escolar de los participantes del taller y el respectivo programa de estudio.

En atención a la información de la Tabla 3, es posible establecer conjeturas respecto del desempeño de los estudiantes al resolver el problema. Por ejemplo, éstos podrían proceder según la **eEe** y utilizar el **p1** o el **p2** sin hacer uso de la **eBr**. También podrían utilizar el **p2** en combinación con la **eBr**. Por otro lado, como se planteó en la Tabla 2, podrían utilizar el **p3** y las **eOd** y **eBr**, lo que idealmente debería llevar a una de las respuestas del problema.

Tabla 2. Posible resolución al problema en cuestión.

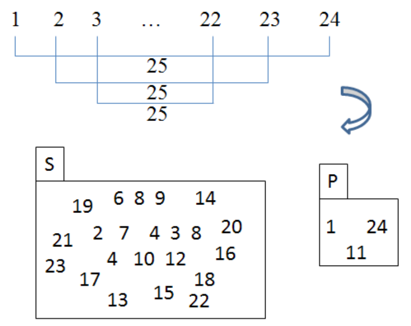
Descripción	Procedimiento
En primer lugar, es necesario calcular "la suma máxima". Para ello se recurre a una regularidad del conjunto de números consecutivos: $25\cdot\frac{24}{2}=300$. El procedimiento matemático permite obtener la suma máxima y una pista, 25·12. Dos factores que pueden ayudar a dar respuesta a lo solicitado. Se puede, con un ensayo y error, averiguar qué ocurre con 24·11 = 264, descontando luego: 300 - (24 + 11) = 265. Difieren en una unidad. Como 1 es el neutro multiplicativo, se puede escribir 24·11·1 = 264 y además 300 - (24+11+1) =264, como se pedía.	

Tabla 3. Los procedimientos matemáticos y estrategias del análisis a priori.

Procedimientos y estrategias asociadas a la resolución del problema	Rótulo
Adiciona y multiplica números de manera arbitraria comprobando la condición dada.	p1
Suma el total de los números y descarta factores en función de dicha suma.	p2
Aplica relaciones aritméticas asociadas a números naturales	p3
Organiza los datos del problema	eOd
Supone resuelto el problema	eSr
Reduce el problema a otro más simple	eRp
Aplica Ensayo y Error	eEe
Busca regularidades	eBr

5.1.2. Análisis de los datos recopilados utilizando ASI

En la Tabla 4, se presentan las distintas respuestas generadas por los 18 estudiantes al problema analizado. El valor 1 indica que se manifiestan tanto las estrategias como los procedimientos matemáticos que se han declarado y el valor 0, que no se manifiestan. Por otro en la columna **R** se indica aquellos que presentaron una respuesta al problema planteado.

Tabla 4. Datos de la aplicación al problema utilizado como diagnóstico.

	Variables								
Estudiantes	p1	p2	p3	eOd	eSr	eRp	eEe	eBr	R
E1	1	0	0	1	0	0	1	1	0
E2	1	1	1	1	0	0	1	1	0
E3	1	0	0	1	0	0	1	1	0
E4	1	0	0	1	0	0	1	1	0
E5	1	0	1	1	0	0	1	1	0
E6	1	0	0	1	0	0	1	0	0
E7	1	1	1	1	0	0	1	1	1
E8	1	1	1	1	0	0	1	1	1
E9	0	0	0	0	0	0	0	0	1
E10	1	1	0	1	0	0	1	1	1
E11	1	1	1	1	0	0	1	1	1
E12	1	0	0	1	0	0	0	1	0
E13	0	0	0	0	0	0	0	0	1
E14	1	1	0	1	0	0	1	0	1
E15	1	0	0	0	0	0	0	0	1
E16	0	0	0	0	0	0	0	0	1
E17	0	0	0	1	0	0	0	0	0
E18	0	0	0	1	0	0	0	0	0

5.1.3. El árbol de similaridad y la clasificación de los procedimientos y estrategias

Con los datos de la Tabla 4, se obtuvo el árbol de similaridad, Figura 2, generando 6 niveles jerárquicos. En el primer nivel significativo, destacan los procedimientos **p2** y **p3** con un índice de similaridad de 0,98 y, en un segundo nivel significativo, el procedimiento **p1** con las estrategias **eBr** y **eEe** con una similaridad de 0,95 (Gras *et al.*, 2008).

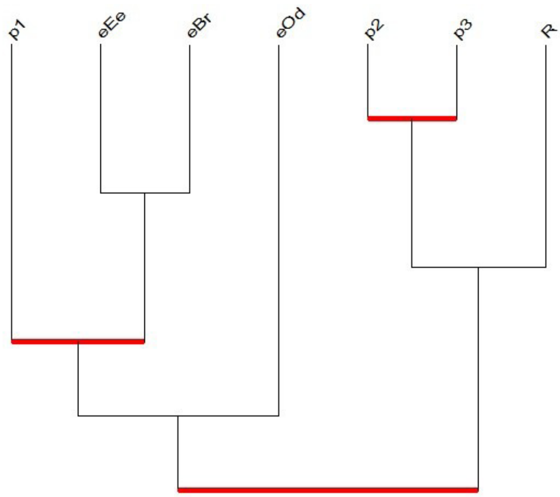


Figura 2. Clasificación de las variables según el árbol de similaridad.

En atención al uso de CHIC se determinó que los **E2**, **E7**, **E8** y **E11** contribuyeron para que la primera clase (**p2**, **p3**) se configurara. De la misma manera, los **E1**, **E2**, **E3**, **E4**, **E5**, **E7**, **E8**, **E10** y **E11** contribuyeron a la conformación de la segunda clase significativa (**p1**, (**eEe**, **eBr**). Cabe destacar que **p1**, **p2**, **eEe** y **eBr** son, en general, procedimientos y estrategias que se han considerado fundamentales para resolver el problema en cuestión.

La respuesta del **E8** en la Figura 3, evidencia una articulación de los procedimientos y estrategias que se trazaron en el análisis *a priori*. Seleccionar el número mayor y un número central para obtener un producto inferior a la suma máxima, para luego variar los factores en función de dicha suma; lo que supone un ensayo y error con la búsqueda de regularidades. Finalmente, obtiene un tercer factor, el 1, que a su vez es el neutro multiplicativo, aunque no lo manifiesta explícitamente. La actuación del **E8** evidencia las características propias de un estudiante talentoso, como se declara en Jaime y Gutiérrez (2014).

De lo anterior, podemos establecer que las técnicas que utiliza el **E3** se circunscriben al uso de la operatoria de los números naturales como tecnología y el uso del sistema de los números naturales como teoría, en el sentido de lo planteado por Rodríguez y Parraguez (2014), lo que está en sintonía con lo que proponen los planes y programas del currículo nacional vigente.

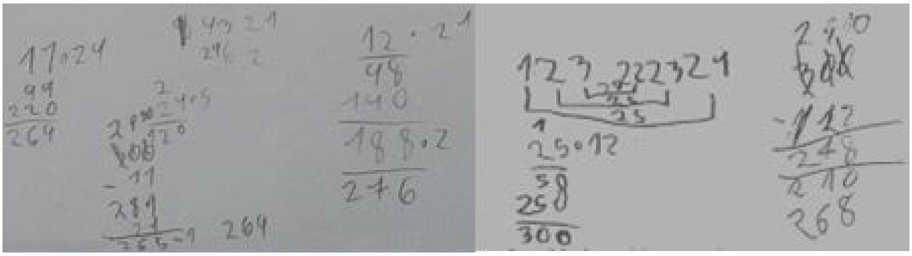


Figura 3. Desempeño del E8 al problema plateado.

En la Figura 4, se aprecia como el **E3** obtiene productos y sumas con los números menores del conjunto dado, desde una lista ordenada, que luego compara con la suma de algunos números restantes, desde un proceso de ensayo y error que incorpora la búsqueda de regularidades. Estrategias que le permite determinar la igualdad que se solicita. Al parecer, no se percata de la suma máxima para descontar los factores que asume y luego comparar gradualmente ambos resultados, en atención a lo que realizó el **E8**. Destaca la originalidad del procedimiento utilizado y su articulación con algunas estrategias. El **E3,** al igual que el **E8**, trabaja procedimientos matemáticos que se sustentan en la operatoria de números naturales como tecnología y se enmarca en los números naturales como teoría.

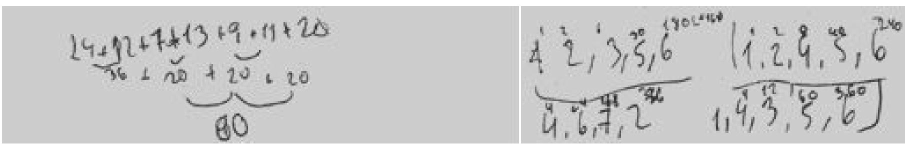


Figura 4. Desempeño del E3 en la resolución del problema planteado.

En la Figura 5, se aprecia como el **E2** obtiene la suma máxima con el procedimiento de la Tabla 1. Luego intenta componer aditiva y multiplicativamente números de la lista horizontal que genera. Al parecer, no logra relacionar los factores que le permite obtener la suma máxima como los tres posibles factores que están involucrados.

Independiente del nivel de éxito obtenido por los estudiantes, se puede apreciar el uso del ensayo y error en combinación con la búsqueda de regularidades, estrategias que están en sintonía con los procedimientos matemáticos

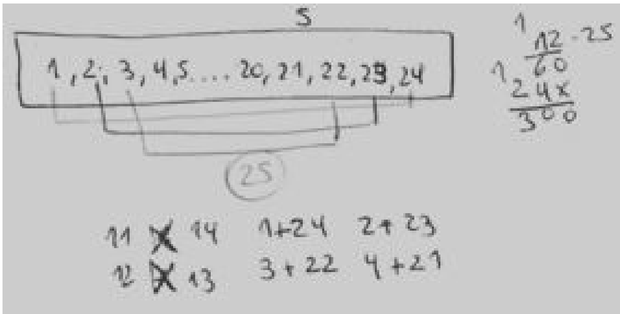


Figura 5. Desempeño del E2 en la resolución del problema planteado.

y lo distintos aspectos que promueven los nuevos programas de estudio a nivel escolar (MINEDUC, 2012). Las diferentes actuaciones que se reportan dan cuenta de las características particulares de estos estudiantes en cuanto a talento en el proceso de RP como se manifiesta en Jaime y Gutiérrez (2014).

5.1.4. Sobre el grafo implicativo y las implicaciones que se desprenden

El grafo implicativo, Figura 6, pone de relieve a **eEe** $\Rightarrow$ **p1** con una intensidad del 95%, lo que denota una influencia de la estrategia **eEe** respecto del procedimiento **p1**. También aparece con una menor intensidad **eBr** $\Rightarrow$ **p1**. Ello representa un camino más elaborado, lo que se ve reflejado en el desempeño de los estudiantes **E2**, **E3** y **E8**.

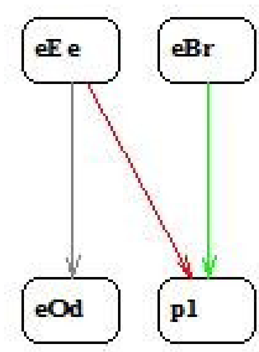
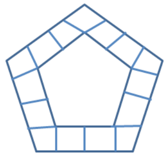


Figura 6. Sobre el grafo implicativo.

5.2. Sobre el desempeño en un problema de distribución numérica

A continuación, se analiza el desempeño de los estudiantes en uno de tres nuevos problemas que se les planteó, el que involucró un conjunto de números naturales consecutivos para ser distribuidos en las casillas que forman los lados de una "figura poligonal", en este caso que se reporta, una "figura pentagonal".

Problema: Distribuyendo números en una figura
Distribuya los números del 1 al 15 en la figura de tal manera que la suma de los números que quedan en cada lado sea igual a 32.



El problema anterior considera los 15 primeros números naturales, a diferencia del anterior que eran 24. Además, es necesario separar el conjunto en 5 subconjuntos no disjuntos. En el caso anterior, los conjuntos eran disjuntos. En la Tabla 5, se proponen algunos procedimientos y estrategias que se podrían esperar tomando en cuenta lo que los programas de estudio proponen.

Tabla 5. Posibles procedimientos matemáticos y estrategias en la RP.

Procedimientos y estrategias que intervienen en la RP	Rótulo
Distribuye números aleatoriamente, verificando la condición dada.	p1
Selecciona números extremos e intermedios del conjunto de números.	p2
Calcula suma de subconjuntos, considerando números extremos y números intermedios del conjunto de números.	p3
Reorganiza sub-conjuntos de números, atendiendo a las diferencias de las distintas sumas que se obtienen.	p4
Organiza los datos del problema	eOd
Aplica Ensayo y error	eEe
Busca regularidades	eBr

En la resolución de este problema, se evidenció el uso de variados procedimientos y estrategias previstos en el análisis *a priori*. A continuación, en la Figura 7 y Figura 8, se presenta el árbol de similaridad y el grafo implicativo que se generó de la tabulación de los datos obtenidos.

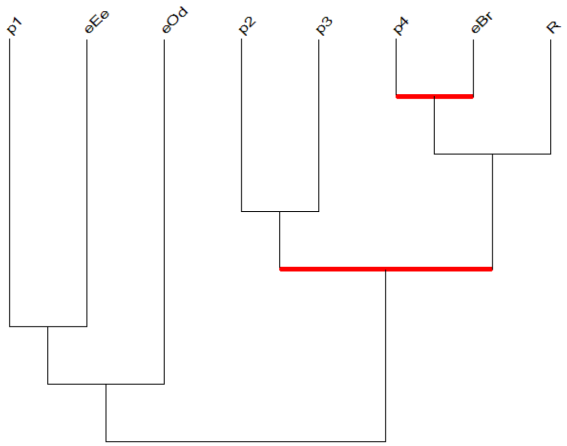


Figura 7. Árbol de Similaridad

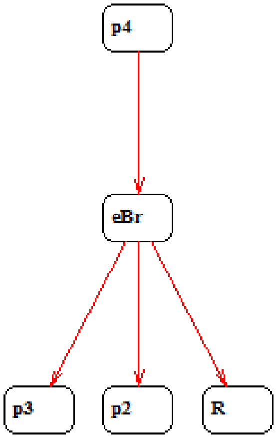


Figura 8. Grafo implicativo.

En la Figura 7 destaca la clase (**p4**, **eBr**) que pone de relieve un procedimiento y una estrategia cuyo uso articulado demanda de un proceso de sistematización y organización por parte de quien las utiliza. Por otro lado, los estudiantes **E3**, **E10** y **E11** contribuyeron a que dicha clase se conformara, los que a su vez tuvieron una participación destacada en el primer problema que se analizó. Esto pone de manifiesto la flexibilidad que existe en este tipo de estudiantes para adaptarse a nuevos requerimientos, variando los procedimientos que están en sintonía con los conocimientos que los programas de estudio vigentes declaran.

En relación al grafo implicativo, Figura 8, se puede deducir que la utilización de un procedimiento más elaborado estimula el uso de otras estrategias y la activación de procedimientos más elementales que inciden en la aproximación de la resolución del problema. En la Figura 9, se aprecia parte del desempeño de **E3**, quien logra distribuir correctamente los números dados.

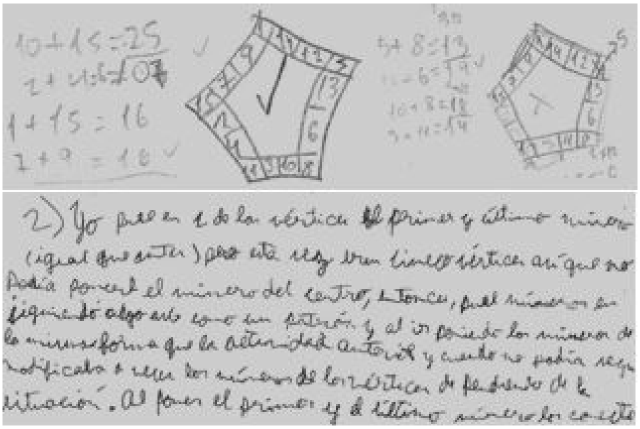


Figura 9. Desarrollo del E3 al problema.

Yo puse en 1 de los vértices el primer y último número (igual que antes) pero esta vez eran cinco vértices asi que no podía poner el número del centro, entonces, puse el número en siguiendo algo como un patrón y al ir poniendo los números de la misma forma que la actividad anterior y cuando no podía seguir modificaba a veces los números del los vértices dependiendo de la situación. Al poner el primer y el último número los conecté.

Se puede apreciar cómo la ubicación estratégica del menor y mayor número en los "vértices" de la figura, constituye una idea fuerza que se manifiesta en los otros problemas similares abordados por los estudiantes. La composición aditiva de parejas de números y, a su vez, la composición aditiva de suma de parejas permite, desde la búsqueda de regularidades, equilibrar el paso de números de un lado a otro.

En la Figura 10, se observa parte el desempeño de **E3** en un problema similar al problema de la figura pentagonal. Se evidencia en la explicación que ofrece, el uso de las mismas estrategias y procedimientos utilizados en el problema anterior, mediante la descomposición aditiva para la suma dada, y poniendo de relieve una nueva estrategia, esto es "suponer resuelto el problema". En este caso, el ensayo y error con la búsqueda de regularidades, son una estrategia efectiva a la hora de acercarse a la respuesta.

Distribuí los números del 1-5-9 porque están el principio-medio y final en los vértices y después el número que faltaba para que de 20 lo partía en 2 y después los ponía si otro lado lo necesitaba, lo hacía de nuevo y lo cambiaba.

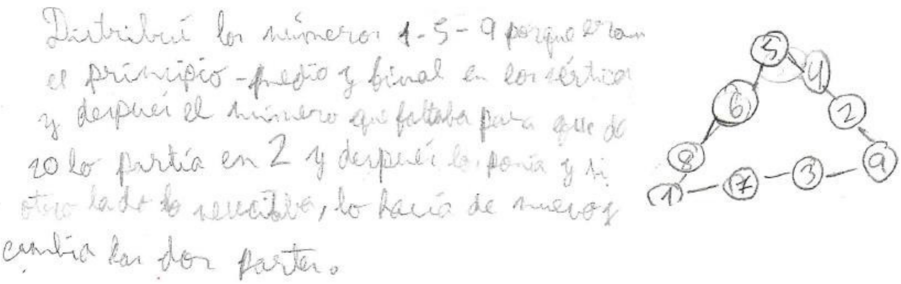


Figura 10. Desempeño del E3 en un problema similar.

En la Tabla 6, se presentan algunos procedimientos y estrategias que se manifestaron en la resolución de los problemas que implicaron números naturales consecutivos en una "figura poligonal".

Tabla 6. Descripción de estrategias y procedimientos que se desprende de la distribución de números en una figura poligonal.

Procedimientos	Estrategias
–Componer aditivamente dos o más números naturales. –Descomponer aditivamente un número natural en otros dos. –Componer multiplicativamente un número natural. –Comparar sumas en un conjunto de números consecutivos. –Separar un conjunto de números consecutivos en subconjuntos, en función de la posición de dichos números dentro del conjunto.	–Confeccionar una lista de números, horizontal o vertical, de manera creciente. –Considerar los vértices de una figura para distribuir los números extremos e intermedios de un conjunto de números. –Buscar regularidades numéricas en función de la cantidad de números por lados y vértices en una figura poligonal. –Buscar regularidades numéricas alternando números en los "lados de una figura" poligonal.

DISCUSIÓN

Los problemas que se seleccionaron para este estudio involucran un conjunto de números naturales consecutivos que deben distribuirse según una o más condiciones dadas. Si bien el número de elementos de cada subconjunto es acotado y se conoce la suma y/o producto, no hay un procedimiento explícito para dar con la respuesta en cada caso. Inclusive, uno de los problemas presenta más de una solución.

De las estrategias utilizadas por los estudiantes, se evidenció preferentemente el uso del *ensayo y error*, *búsqueda de regularidades* y *uso de una lista*, las que fueron articuladas y activadas en distintos momentos del proceso de resolución. El *ensayo y error* se evidenció desde la realización de cálculos aritméticos de manera reiterada que se sistematizó con la *búsqueda de regularidades* para lograr los distintos objetivos: la misma suma para todos los elementos de subconjuntos no disjuntos, o bien, que la suma y el producto de los elementos de dos subconjuntos disjuntos fuese la misma.

La *búsqueda de regularidades* se activó comparando los resultados de las operaciones aritméticas que los estudiantes fueron realizaron, para luego organizar sumas o diferencias para lograr "equilibrar" y dar con el requerimiento del problema. En el caso de la distribución de números en una "figura geométrica", los vértices fueron un punto de referencia a la hora de distribuir los números según su posición en el conjunto, la que se obtuvo gracias al *uso de una lista*, preferentemente horizontal. La articulación de dichas estrategias y procedimientos se condice con las características de este grupo de estudiantes, señaladas en los antecedentes.

En definitiva, las estrategias *ensayo y error*, *b*úsqueda de regularidades y *haz una lista* se utilizaron de manera recurrente en cada uno de los problemas planteados, activando procedimientos como comparar, agregar, quitar y reorganizar números. Destaca, asimismo, el hecho de intercambiar números mayores por números menores para disminuir la suma de sus elementos o el producto de estos, procedimientos que forman parte de la actividad matemática y apuntan al despliegue de un pensamiento matemático, además de constituir insumos para la activación y configuración de procedimientos matemáticos más elaborados como el que se evidenció para obtener la suma máxima en el *análisis a priori*, procedimiento que se promueve en los programas de estudio, a nivel escolar, como una técnica para trabajar números consecutivos y en la justificación de la suma de una progresión aritmética, en cursos de matemática a nivel de pregrado.

Los procedimientos matemáticos utilizados por los estudiantes fueron acordes a las exigencias de cada problema. Componer o descomponer aditivamente números, o bien, componer multiplicativamente, son procedimientos que se fomentan en la escuela desde tareas específicas y rutinarias que luego se olvidan, pero que en este tipo de problemas se activaron, poniendo en juego, por ejemplo, la "sensibilidad numérica".

CONCLUSIONES

En primer lugar se destaca la importancia del Análisis Estadístico Implicativo (ASI) en el foco de esta investigación, pues permitió visualizar dos tipos de relaciones entre los procedimientos matemáticos y las estrategias, que se establecieron *a priori*, y que los estudiantes pusieron de manifiesto: *similaridad* e *implicación*. En el primer problema, y mediante *similaridad*, se muestra que los intentos arbitrarios, o por ensayo y error, quedan alejados de las estrategias que están más cercanas a la resolución correcta del mismo, poniendo de relieve la necesidad de un *ensayo y error* más sistemático. Las *implicaciones* no cobran una fuerte intensidad, excepto la que indica que una estrategia de ensayo y error conlleva el uso de un procedimiento de operaciones con números arbitrarios, lo cual era esperable *a priori*. En el segundo problema, el análisis de *similaridad* agrupa la resolución correcta con la estrategia de *búsqueda de regularidades*, y con los procedimientos más organizados, mientras que el análisis implicativo muestra que dicha cercanía entre variables, también es una fuerte relación *implicativa*, donde el uso del procedimiento **p4** implica, en gran medida, que se trata de una *búsqueda de regularidades*, lo cual conlleva tanto a la resolución correcta, como al uso de los procedimientos **p2** y **p3**. Además de mostrar las relaciones entre variables, estos análisis permiten destacar a los estudiantes que más contribuyen a dichas clasificaciones e implicaciones, lo cual puede servir, en el caso de muestras de mayor tamaño (lo cual no es el caso de esta investigación), para investigar sobre otros factores que intervengan en estos procesos.

Respecto de las estrategias que utilizaron los estudiantes, en función del tipo de problemas que se planteó, están al alcance de un estudiante promedio, dado que el problema de alguna manera lo sugiere: *ensayo y error*, *crear una lista*, *buscar regularidades*. La diferencia radica en la forma en cómo los estudiantes talentosos las utilizan, sistematizando la información que se despliega a medida que utilizan los distintos recursos. En definitiva, poniendo en juego el uso de un pensamiento matemático, en el sentido que se manifiesta en lo antecedentes de este artículo.

Los procedimientos matemáticos que pusieron de manifiesto los estudiantes están en sintonía con los requerimientos del problema y, por otro lado, se articulan con los contenidos que declaran los programas de estudio vigentes. Ello permite señalar que el éxito en la resolución de los problemas analizados requiere de ingredientes cognitivos y el conocimiento necesario de los números en sintonía con los requerimientos del problema. Aspectos que deben considerarse a la hora de articular los distintos ejes que promueve el ajuste curricular en nuestro país.

Como proyección, un aspecto que emerge de la presente investigación para organizar el trabajo de la RP a nivel escolar, en un futuro, es abordar *una temática en RP* para estimular el desarrollo de un trabajo interdisciplinario y a la vez fomente un pensamiento matemático en el sentido de lo que se plantea en los fundamentos de PISA y TIMSS, es decir, identificar un elemento articulador que caracterice un conjunto de problemas como hilo conductor para el trabajo de procedimientos matemáticos y estrategias, como es el caso de la distribución de números naturales. La cuadrícula es otro ejemplo de *una temática en RP* que se intentará documentar en un próximo estudio, así como el papel de los problemas de criptoarimética.

REFERENCIAS

Aretxaga, L. (coord.). (2013). *Orientaciones educativas. Alumnado con altas capacidades intelectuales.* Consultado el 18 de agosto de 2016 en: http://www.hezkuntza.ejgv.euskadi.eus/contenidos/informacion/dig_publicaciones_innovacion/es_escu_inc/adjuntos/16_inklusibitatea_100/100012c_Pub_EJ_altas_capacidades_c.pdf.

Artola T., Barraca, J., Mosteiro, P. (2005). *Niños con altas capacidades: quiénes son y cómo tratarlos.* Madrid: Entha.

Choi, I. y Lee, K. (2009). Designing and Implementing a Case-based Learning Environment for Enhancing Ill-structured Problem Solving: Classroom Management Problems for Prospective Teachers. *Education Technology Research and Development,* 57(1), 99-129.

Cruz, M. (2006). *La enseñanza de la Matemática a través de la resolución de problemas.* Tomo I. La Habana: Educación Cubana.

Dijkstra, E. (1991). Instructional Design Models and the Representation of Knowledge and Skills. *Educational Technology,* 31(6), 19-26.

Emmet, E (1998). *Juegos para devanarse los sesos.* Barcelona: Gedisa.

Fernández, M., Valera, J., Martina, M. y Rial, A. (2003). Estudio longitudinal sobre la capacidad educativa en adolescentes escolarizados de Buenos Aires. *Anales de Psicología,* 19(2), 293-304.

Flanagan, A. y Arancibia, V. (2005). Talento académico: Un análisis de la identificación de alumnos talentosos efectuada por profesores. En *Psykhe*, 14(1), 121–135. Consultado el 18 de agosto de 2016 en: http://www.scielo.cl/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0718-22282005000100010.

Gagné, F. (1993). Un modelo diferenciador de dotación y talento. Citado por Flanagan, A.; Arancibia, V. (2005). Talento Académico: Un Análisis de la Identificación de Alumnos Talentosos Efectuada por Profesores. *Psykhe*, 14(1), 121-135.

Gardner, H. (1993). *Multiple Intelligences: The Theory in Practice*. New Cork: Basic Books.

Gómez, M. P. (2010). Resolviendo problemas del mundo real: el Modelo Pedagógico REAPS. En M. C. García (Ed.), *Talentos en el Bicentenario. Educación para el desarrollo de estudiantes sobresalientes*. Antofagasta: Centro de Investigación y Desarrollo de Talento DeLTA-UCN, Universidad Católica del Norte. pp. 55-62.

Gras, R.; Suzuki, E.; Guillet, F. y Spagnolo, F. (2008) (eds.). *Statical Implicative Analysis. Teory and Applications*. Verlag Berlin Heidelberg: Springer.

Jaime, A.; Gutiérrez, A. (2014). La resolución de problemas para la enseñanza de alumnos de educación primaria con altas capacidades matemáticas. En N. Gómez, L. Puig (eds.), *Resolver Problemas. Estudios en memoria de Fernando Cerdán*. Valencia: Universidad de Valencia. pp. 147-190.

Kokot, S. (1998). Enseñanza Proactiva: Desarrollando las dotes de niños promisorios. Consultado el 20 de agosto del 2016 desde http://consejoderedieiupn.blogspot.cl/2005/09/capacidades-y-aptitudes-sobresalientes.html.

Martínez, M. y Guirado, A. (2012). *Altas capacidades intelectuales. Pautas de actuación, orientación, intervención y evaluación en el periodo escolar*. Barcelona: Graó.

Mansilla, C., Vásquez, D. y Estrada, C. (2012). Pertinencia normativa del Raven para la evaluación de población infantojuvenil socialmente vulnerable. *Terapia Psicológica*, 30(1), 73-80.

MINEDUC (2007). *PISA 2006: Rendimientos de estudiantes de 15 años en Ciencias, Lectura y Matemática*. Santiago de Chile: Unidad de Curriculum y Evaluación/Ministerio de Educación de Chile. Consultado el 10 de enero de 2013 en: http://www.agenciaeducacion.cl//biblioteca-digital/archivos-pisa/.pdf.

MINEDUC (2010). *Orientaciones para la implementación del Decreto Supremo Núm. 170 en Programas de integración escolar*. Santiago de Chile: Ministerio de Educación de Chile.

MINEDUC (2012). *Ajuste curricular 2012*. Consultado el 12 de junio de 2013 en: http://www.ayudamineduc.cl/docs/informacion/info_guia/guia_ajuste.pdf.

MINEDUC (2016). Bases curriculares. Consultado el 02 de Noviembre de 2016 en: http://media.mineduc.cl/wp-content/uploads/sites/28/2016/04/Cartilla-Curricular-FG-1.pdf.

Orús, P.; Zamora, L. y Gregori, P. (2009) (eds.). *Teoría y aplicaciones del Análisis Estadístico Implicativo. Primera aproximación en lengua hispana.* Consultado el 02 de marzo de 2015 en: http://hdl.handle.net/10234/125568.

Palacios, A.; Solarte, S. (2013). *Estudio de la resolución de problemas matemáticos no rutinarios de docentes de matemática en formación: Un estudio a las estrategias heurísticas*. Consultado el 08 de abril 2016 en: http://bibliotecadigital.univalle.edu.co/bitstream/10893/6778/1/CD-0395432.pdf.

Pifarré, M.; Sanuy, J. (2001). La enseñanza de estrategias de resolución de problemas matemáticos en la ESO: Un ejemplo concreto. *Revista Enseñanza de las Ciencias*. 19(2). 297-308.

Pino, J. (2013). La resolución de problemas y el dominio afectivo: un estudio con futuros profesores de matemática de secundaria. En Mellado, V.; Blanco, L.; Borrachero, A y Cárdenas, J. (eds.) *Las emociones en la enseñanza y el aprendizaje de las Ciencias Experimentales y las Matemáticas*. Badajoz, España: DEPROFE. pp. 117-148.

Pólya, G. (1990). *Cómo plantear y resolver problemas*. México: Trillas.

Pozo, J., Pérez, M. y Domínguez, J. (1994). *La solución de problemas*. España: Ediciones Siglo XXI.

Raven, J.C.; J. H. Court y Raven, J. (2004). *Test de Matrices Progresivas. Escala general. Manual*. Buenos Aires: Paidós.

Recamán, N. (2006). *El palacio de los precisos cristales. Divertimentos matemáticos*. (Barcelona, Gedisa).

Renzulli, J. S. (1978). What Makes Giftedness? Re-examining a Definition. *Phi Delta Kappan,* 60(3), 180-184.

Roget, A. (2009) Una aproximación a la complejidad educativa: cómo gestionarla y optimizar su riqueza formativa en el aula. *Magis*, 2(3), 191-210.

Rodríguez, M. y Parraguez, M. (2014). Interpretando estrategias en Resolución de Problemas desde dos constructos teóricos: Un estudio de caso. *Revista electrónica de investigación de la enseñanza de las ciencias*, 9 (2), 1-12.

Schoenfeld, A. (1994). *Mathematical Thinking and Problem Solving*. Hillsdale: NJ, Erlbaum.

Santos, L.M. (1997). *Principios y* métodos en la resolución de *la resolución de problemas en el aprendizaje de las matemáticas*. México: Iberoamericana.

Santos, L.M. (2007). *Resolución de problemas matemáticos. Fundamentos Cognitivos*. México: Trillas.

Shore, B.; Kanevsky, L. (1993). Thinking Processes: Being and Becoming the Gifted, in Heller, K.; Monk, F. J. y Passow, A. (eds.), *International Handbook of Research and Development of Giftedness and Talent*. Oxford: PergamonPress. pp. 133-147.

Stainback, S. y Stainback, W. (1999). *Aulas inclusivas: Un nuevo modo de enfocar y vivir el curriculum*. Madrid: Narcea.

Sternberg, R. J. (1997). A Triarchic View of Giftedness: Theory and Practice, in Colangelo, N. y Davis, G. A. (eds.), *Handbook of gifted education*. Boston: Allyn and Bacon. pp. 43-53.

UNESCO (2013). *Enfoques estratégicos sobre las TIC en educación en América Latina y el Caribe.* Consultado el 15 de abril de 2006 en: www.unesco.org/new/fileadmin/MULTIMEDIA/FIELD/Santiago/images/ticsesp.pdf.

Valle, M.; Juárez, M y Guzmán, M. (2007). Estrategias generales en la resolución de problemas de la olimpiada mexicana de matemáticas. Consultado el 18 de marzo de 2016 en: http://redie.uabc.mx/vol9no2/contenido-valle.html.

Anexo

4.- Contenidos y Planificación General del Curso (15 sesiones)

Sesiones	Competencias y Sub-Competencias	Contenidos (disciplinarios o temáticos para cada sesión)	Actividades (a desarrollar por docentes y estudiantes)	Evaluación (instancias e instrumentos de evaluación de proceso)
Sesión Nº 1	Pensar matemáticamente, comunicar y evaluar una estrategia.	Fracciones, potencias y figuras poligonales planas y regulares.	El problema de la herencia. Reflexión individual, reflexión colectiva y posibles soluciones y otros problemas asociados.	Evaluación Diagnóstica. Conocimiento matemático y estrategias (Pre test).
Sesión Nº 2	Comunicar, representar y buscar patrones.	Números naturales, figuras planas, expresiones algebraicas, patrones numéricos.	Las cuadrículas: Contar figuras y distribuir números. Uso de Excel para modelar el problema y visualizar estrategias nuevas.	Co-evaluación: Evaluar los distintos etapas de la resolución colectivo (pauta).
Sesión Nº 3	Observar y comunicar regularidades. Perseverancia y tolerancia.	Estrategias: Ensayo y error. Busca un patrón.	Las cuadrículas: distribución de piezas de poliminós, cubriendo en su totalidad y reproduciendo diseños variados.	Autoevaluación: Indicar, según pauta, aspectos a mejorar en función de compromiso inicial (Contrato de aula).
Sesión Nº 4	Razonamiento inductivo, organizar información, empatía y tolerancia.	Área de figuras poligonales convexas planas, patrones numéricos, expresiones algebraicas-	El geoplano y le teorema de Pick. Establecer regularidades numéricas para el cálculo de área de una región poligonal convexa.	Evaluación formativa. Lista de Cotejo.
Sesión Nº 5	**JORNADA**	**DE**	**FORMACION**	**DOCENTE**
Sesión Nº 6	Perseverancia, identificar regularidades, comunicar, inventar.	Estrategias: Buscar patrones, hacer una lista, ensayo y error.	El problema de las piezas de dominós. ¿Cuál es la estrategia más óptima?	Evaluación sumativa: Diseñar, utilizando aplicaciones(PAINT) y en PPT proponer un problema.
Sesión Nº 7	Manipular aplicación TIC´s, formular hipótesis, argumentar .	Figuras planas, patrones numéricos en números, uso de fórmulas para generalizar.	Las Espirofiguras. Uso de TIC´s. Buscar regularidades, desde un trío de números enteros, para una figura plana.	Evaluación Formativa. La participación y la calidad de la comunicación.
Sesión Nº 8	Formular hipótesis, argumentar.	Construcciones geométricas, modelos geométricos, enunciación de teoremas LAR	Los rebotes y el billar: Un problema LAR (Largo, Ancho, Rebotes). La relación entre el largo, ancho y el números de rebotes de una bola en una mesa de de billar rectangular y la enunciación y argumentación de los teoremas LAR.	Evaluación Formativa. Trabajo colaborativo

Sesión Nº 9	Formular hipótesis, representar, describir, enunciar y argumentar.	Construcciones geométricas, patrones numéricos, conceptos aritméticos: Múltiplo, divisor, par, impar. Expresiones algebraicas.	Los rebotes y el billar: Un problema de "pillos". El uso de transformaciones isométricas (la reflexión) en el rebote de una bola en una mesa de billar. Análisis de vídeo, Donald, en el país de las Matemágicas.	Evaluación Sumativa: inventar un problema, utilizando aplicación(PAINT), PPT y Geogebra en relación a sacar pillos y presentar posibles soluciones y estrategias.
Sesión Nº 10	Compartir y espíritu de superación.	El roce, ángulos, el centro de masa, vocabulario del Pool.	¿Lo teórico y lo real es lo mismo? Las variables físicas y geométricas.	Evaluación formativa: Comunicar por escrito que aspectos de la geometría y la física están presentes.
Sesión Nº 11	Establecer supuestos, pensar matemáticamente, buscar regularidades.	Operatoria y conceptos asociados: Valor posicional, sumandos, factores, dividendo, divisor, algoritmos adición, sustracción multiplicación y división.	El problema de Cripto-aritmética 1: Problema de corte aritmético que hace pensar en los algoritmos establecidos para las operaciones desde las regularidades y supuestos que se deben establecer. ¿Cuál es la ruta más óptima?	Autoevaluación. Perseverancia y trabajo en equipo.
Sesión Nº 12	Establecer supuestos, pensar matemáticamente, buscar regularidades.	Operatoria y conceptos asociados: Valor posicional, sumandos, factores, dividendo, divisor, algoritmos adición, sustracción multiplicación y división.	El problema de Criptoaritmética 2: Problema de corte aritmético que hace pensar en los algoritmos establecidos para las operaciones desde las regularidades y supuestos que se deben establecer. ¿Cuál es la ruta más óptima?	Co-evaluación. Estrategias utilizadas.
Sesión Nº 13	Perseverancia, utilización de software.	Construcciones geométricas, transformaciones isométricas, propiedades de las figuras planas.	Puntos Inaccesibles 1: Problema de corte geométrico que invita a distintas estrategias geométricas y propiedades de figuras planas.	Evaluación Formativa. Uso de instrumentos geométricos.
Sesión Nº 14	Perseverancia, utilización de software.	Construcciones geométricas, transformaciones isométricas, figuras poligonales planas y conexas.	Puntos Inaccesibles 2: Problema de corte geométrico que invita a distintas estrategias geométricas y propiedades de figuras planas.	Evaluación Sumativa: Diseñar, utilizando aplicación (PAINT), PPT y Geogebra un problema.
Sesión Nº 15	Comunicar estrategias, tolerancia y empatía	Estrategias y uso de conocimiento matemático.	Feria de Problemas: Juego y manipulación de objetos en situaciones problema.	Plenario: Logros, proyecciones y aspectos a mejorar de un taller de resolución de problemas. (Post-test)